УДК 330.46

В. В. Зубова,
викладач кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
ORCID ID: 0000-0002-5310-0932

DOI: 10.32702/2306-6792.2019.13.53

ТЕОРІЯ МАТЧИНГУ В ЕКОНОМІЦІ: ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ

V. Zubova,
Lecturer, V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv
ORCID ID: 0000-0002-5310-0932

MATHING THEORY IN THE ECONOMY: APPLICABLE ASPECTS OF APPLICATION

У статті розглянуто основні питання теорії матчингу та проаналізовано основні прикладні аспекти застосування цієї теорії в економіці. Реалізація алгоритму Гейла-Шеплі дозволяє знайти оптимальні поєднання в ситуаціях, коли для кожного члена однієї групи необхідно знайти відповідну пару в іншій групі. У статті наведено визначення понят тя "матчинг", "індивідуально раціональний матчинг", "стійкий матчинг". Окремо висвітлено алгоритм Гейла-Шеплі, який дозволяє застосовувати теорію матчингу в прикладних дослідженнях. Прикладні аспекти застосування теорії матчингу: модель фірми-працівники, ринок молодих лікарів, задача про вибір коледжу, задача про розподіл стипендій між студентами. В рамках проведеного дослідження було побудовано та описано блок-схему реалізації алгоритму Гейла-Шеплі, що є праобразом для подальшої програмної реалізації теорії матчингу.

The article deals with the main questions of the matching theory and the main applied aspects of the application of this theory in the economy were analyzed. The implementation of the Gail-Sheply algorithm allows to find optimal combinations in situations where for each member of the same group one needs to find the corresponding pair in another group. The article defines the concept of "match", "individually rational match", "stable match". Separately covered by the Gail-Sheply algorithm, which allows applying the theory of match in applied research. The model of firm-workers, the market of young doctors, the task of choosing a college, the problem of the distribution of scholarships among students were considered as applied aspects of the application of the matching theory. The problem of effective distribution was considered on the example of finding graduates of schools of nominal scholarships of universities according to the results of the EIT. Each university has only 1 scholarship for each specialty. The task of bilateral one-to-one matchmaking (1↔1) is realized in the same way. To solve the problem, authors formed a set of search engines (graduates of schools that enter universities) and a set of elected specialities. Each of these positions — a pair of "specialty-university", was called "uni-speciality". In the framework of this research, a block diagram of the implementation of the Gail-Sheply algorithm was constructed and described, which is a prototype for further program implementation of the matching theory. An important quality criterion is to ensure equitable access to high-quality higher education on a competitive basis and to ensure that those who can successfully study in a particular direction and have a motivational factor are selected for the higher education institutions. The consistent implementation of these principles is possible on the basis of modern scientific methods, innovative approaches, which allow to effectively solve applied problems.

Ключові слова: матчинг, стійкий матчинг, алгоритм Гейла-Шеплі, модель мар'яжу, модель фірми-працівники, ринок молодих лікарів, задача про вибір коледжу, задача про розподіл стипендій між студентами.

Key words: matching, stable match, Gail-Shepel's algorithm, a model of a marriage, a model of firm-workers, a market for young doctors, the task of choosing a college, the task of distributing scholarships among students.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Нобелівську премію в галузі економіки в 2012 р. отримали двоє американських учених Елвін Рот (Гарвардський університет) та Ллойд Шеплі (університет Каліфорнії) за витончені результати в теорії коаліційних ігор. На їх основі було створено практичні алгоритми, які заміняли ринкову взаємодію в ряді сфер людської діяльності, де вона неможлива або неефективна [3]. "Поєднання основ теорії Ллойда Шеплі з емпіричними дослідженнями, експериментами і практичними моделями Елвіна Рота створили поле для дослідження і покращення продуктивності багатьох ринків" [5].

Як приклад можна навести ринок кваліфікованої праці, на якому домінують двосторонні контрактні відносини. Під час укладання трудових угод роботодавцю, передусім, важливо виявити специфічні характеристики працівника, які відносяться до кваліфікації і творчим здібностям кандидата. Для молодих випускників ЗВО заробітна плата нерідко буває фіксованою, і не є основним предметом торгів у разі укладення угоди. В довгострокових трудових відносинах важлива не стільки початкова ставка заробітної плати, скільки перспектива її зростання, яка залежить від очікуваної ефективності партнерства. На відміну від двосторонніх контрактних відносин, ринок некваліфікованої праці характеризується досить гнучкою зарплатою, однорідними властивостями і короткостроковими горизонтами, і в цьому випадку він набагато ближчий до моделі Адама Сміта [3].

Ситуації встановлення партнерства виникають і в багатьох інших сферах, іноді відіграючи в економіці поступову роль, наприклад, на ринку освітніх послуг. Якщо останні надаються на бюджетній основі, то рішення про розподілення навчальних місць здійснюється по неринковим критеріям. Ключову роль у реалізації партнерських відносин грають інститути, які замінюють вільний ринок. У випадках, коли децентралізовані механізми взаємодії виявляються неоптимальними, організаторські функції повинна брати на себе держава. В усіх наведених вище випадках мова йде, по суті, про формуванні коаліції з двох учасників. Це питання є предметом теорії коаліційних (кооперативних) ігор [4].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У 1962 році в журналі American Mathematical Monthly з'явилась робота "Вступ до коледжу та стабільність шлюбів" (College admission and the stability of marriage) математиків Девіда Гейла (університет Брауна) та Ллойда Шеплі (Прінстонський університет) [1]. У цій роботі, яка відносилась до теорії коаліційних ігор, вчені розглядали формальну задачу, яка пізніше отримала назву "задача (модель) мар'яжу".

Реалізація алгоритму Гейла-Шеплі дозволяє знайти оптимальні поєднання в ситуаціях, коли для кожного члена однієї групи необхідно знайти відповідну пару в іншій групі. Вчені не заперечують, що деякі зв'язки між контрагентами дійсно обумовлюються економічним фактором. Наприклад, працівники намагаються потрапити на підприємства з вищою заробітною платою. Але, в деяких випадках, такий підхід не працює. І розподілення ресурсів залежить від нецінових критеріїв, а точніше, від грамотного управління. Економісти відзначають, що така методика розподілення, яка була запропонована Л. Шеплі, та удосконалена Е. Ротом може бути використана практично в будь-якому аспекті працевлаштування.

Класичний вигляд алгоритму Гейла-Шеплі був детально розглянутий в роботах [1; 4; 7; 10; 12—14].

МЕТА СТАТТІ

Метою статті є вивчення основних теоретичних положень теорії матчингу та аналізі основних прикладних аспектів застосування алгоритму Гейла-Шеплі.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Модель мар'яжу (франц. mariage — шлюб, союз, угода). Розглянемо дві множини економічних агентів (індивідів): $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ — агенти, та $W = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ — контрагенти. Кожен агент має свої уподобання серед контрагентів, та кожний контрагент має своє уподобання серед агентів. Ці уподобання транзитивні. Додатково до цього, необхідно врахувати можливість того, що агент m, наприклад, краще відмовиться від економічних відносин, ніж укладе угоду з контрагентом ω.

Уподобання кожного з агентів будуть представлені в вигляді упорядкованого списком P(m) елементів множини $W \cup \{m\}$. Наприклад, $P(m) = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m$ (перший вибір — укласти угоду з 1, другий вибір — з ω_2, третій — не вступати в економічні відносини). Аналогічно для контрагентів — кожен має свій перелік $P(\omega)$ елементів множини $M \cup \{\omega\}$.

Позначимо P множину переліків уподобань $P = \{P(m_1), \dots P(m_n),\ P(\omega_1) \cdots P(\omega_m)\}$. Тоді, P — це двосторонній профіль уподобань. Кожна трійка (M,W,P) визначає деякий ринок мар'яжу. Будемо вважати, що: $\omega >_m \omega'$, якщо m віддає перевагу ω, а не ω', і $\omega \geq_m \omega'$, якщо для m ω не гірше ω'. Аналогічно визначаємо $m >_\omega m'$ та $m \geq_\omega m'$. Будемо називати контрагента ω прийнятним для m, якщо для нього варіант обрати його не гірше, ніж відмовитись від угоди, тобто $\omega \geq_m m$. Аналогічно, m прийнятний для ω, якщо $m \geq_\omega \omega$. Іноді допускається байдужість, наприклад, $\omega \geq_m \omega'$, та $\omega' \geq_m \omega$ (при $\omega \neq \omega'$): в такому випадку будемо вважати, що $\omega \sim_m \omega'$. Якщо у індивіда немає байдужих варіантів серед прийнятних альтернатив, будемо вважати, що агент має строгі переваги. Якщо переваги строгі і всі альтернативи прийнятні, то будемо говорити, що він має стандартні уподобання. Коли уподобання всіх індивідів стандартні, профіль уподобань P також будемо називати стандартним.

Результатом ринку мар'яжу є деяка множина мар'яжів. Необхідно врахувати те, що не всі укладають угоди, деякі відмовляються від ведення економічної діяльності.

Матчинг μ — взаємно однозначне відображення множини $M \cup W$ на себе, що має такі властивості:

— якщо $\mu(m)=\omega$, то $\mu(\omega)=m$ (тобто $\mu^2(x)=x$ для будь-якого $x \in M \cup W$);

— якщо $\mu(m) \neq m$, то $\mu(m) \in W$ (таким чином, $\mu(m) \in W \cup \{m\}$);

— якщо $\mu(\omega) \neq \omega$, то $\mu(\omega) \in M$ (таким чином, $\mu(\omega) \in M \cup \{\omega\}$).

Матчинг μ називається індивідуально раціональним якщо він не містить пари (m, ω), в якій кожен неприйнятний для іншого, тобто $m >_m \omega$ та $\omega >_\omega m$. Коли б така пара була в μ, матчинг міг би бути покращеним індивідуально, оскільки правила дозволяють індивіду не вступати в економічні відносини. Окрім того, будемо вважати, що матчинг μ може бути покращений шляхом пари (m, ω), якщо ця пара не міститься в матчингу μ, тобто $\omega \neq \mu(m)$ і $m \neq \mu(\omega)$ але кожен з цієї пари має більші переваги для іншого, ніж партнер по матчингу μ: $\omega >_m \mu(m)$ і $m >_\omega \mu(\omega)$.

Припустимо тепер, що матчинг знаходиться в процесі формування і офіційного закріплення. Тоді на цій стадії, якщо він може бути покращений, то він нестійкий: за наявності пари (m, ω), що блокує матчинг, індивіди m і ω відмовляться від своїх партнерів і створять пару один з одним, якщо ж матчинг індивідуально ірраціональний, то в ньому знайдеться пара, якій теж краще не укладати угоди.

Матчинг μ називається стабільним (стійким), якщо він не може бути покращений індивідуально або за допомогою пари.

Теорема Гейла-Шеплі. В будь-якій моделі мар'яжу існує хоча б один стійкий матчинг.

Алгоритм відкладеного прийняття пропозиції агентів.

0. якщо деякі уподобання не строгі, то довільним чином розбиваємо зв'язки (тобто, якщо, наприклад, $\omega_i \sim_m \omega_j$, упорядкуємо ω_i і ω_j в уподобанні m лексикографічно, але можна, наприклад, і в випадковому порядку).

1. a) кожен агент робить пропозицію номеру 1 в своєму списку (якщо в нього є прийнятні кандидатури);

b) кожний контрагент відкидає відразу всіх неприйнятних кандидатур, і, якщо він отримав більш ніж одну прийнятну пропозицію, "відкладає" (або "бере до уваги") найбільш прийнятну пропозицію, а інші — відкидає;

k. a) будь-який агент, відкинутий на k-1 кроці, робить нову пропозицію наступній прийнятній кандидатурі-контрагенту зі свого списку, який йому ще не відмовив. (Якщо прийнятних варіантів у нього не залишилось, то він не робить більше пропозицій);

b) кожний контрагент залишає одну найбільш прийнятну пропозицію, які були отримані ним до моменту часу k, інші — відкидає.

Результат роботи алгоритму. Коли не робиться жодна з пропозицій — алгоритм зупиняється і створюється матчинг з пар: агент і контрагент, чию пропозицію він залишив.

Доведення теореми безпосередньо випливає з того, що алгоритм завжди зупиняється: так як жоден агент не робить пропозицію двічі одному і тому ж контрагенту, кількість кроків алгоритму не повинно бути більше nm, де $n=|M|$, $m=|W|$.

Крім того, результатом завжди є стійкий матчинг. Дійсно, індивідуальна раціональність слідує з того, що жоден агент не робить пропозиції неприйнятному для нього контрагенту, і жоден контрагент не залишає пропозиції неприйнятного для нього агента. Щоб довести відсутність пар, які блокують матчинг, припустимо, що агент віддає перевагу іншому контрагенту, ніж тому, що прийняв його пропозицію. В такому випадку він уже робив пропозицію цьому контрагенту раніше і отримав відмову, тому що у нього виявилась краща пропозиція, так що вони не можуть організувати пару, яка блокує матчинг [3].

Крім того, якщо всі уподобання в двосторонньому профілі строгі, то множина стійких матчингів має M-оптимальний стійкий матчинг, який для будь-якого агента не гірше інших стійких матчингів, і, аналогічно, W-оптимальний стійкий матчинг [2, с. 63].

У задачі мар'яжу існує декілька узагальнень. Найпростіше — це нерівна кількість партнерів, але, виявляється, алгоритм Гейла-Шеплі ефективно працює.

Задача про вибір коледжу (вона фігурувала в назві оригінальної роботи) [1]. В цьому випадку замість агентів фігурують студенти, замість контрагентів — навчальні заклади. Від основної задачі ця має відмінність у тому, що навчальні заклади можуть приймати більш за одного студента. Існує множина ЗВО і множина студентів-абітурієнтів. Кожний коледж C^i набирає $q_i \geq 1$ студентів (q_i — квота), а кожен студент вступає до одного коледжу.

У даній моделі діє алгоритм відкладеного прийняття рішень: кожен коледж Сі робить пропозицію qі студентам, а ті відбирають найбільш прийнятні для себе пропозиції.

До 2003 року вступникам до Нью-Йоркських ЗВО було запропоновано оцінити свої 5 найбільш уподобаних варіантів вступу. Після цього ці списки уподобань були передані до ЗВО. Вони, в свою чергу, вирішували, прийняти, відмовити чи надати місце в черзі кожному абітурієнту. Процес повторюється іще два раунди, і студенти, які не були назначені до будь-якого ЗВО після 3-го раунду виділяються через адміністративний процес. Але це не дає вступникам достатньої можливості сформулювати чіткий список своїх уподобань, а ЗВО, в свою чергу, не мають достатньої можливості робити пропозиції. В результаті, близько 30000 студентів щороку закінчують школу і не знають, до якого ЗВО вони розподілені. Крім того, цей процес призвів до спотворення уподобань. Ця проблема виникла тому, що ЗВО більш схильні до тих вступників, які займають перше місце в їх системі відбору, в той час, як вступники малоймовірно, що будуть допущені до ЗВО, яким вони віддали перевагу згідно з власними інтересами, тому що вони віддадуть перевагу більш реалістичним, в яких вони будуть займати перші місця. В 2003 році даний алгоритм був оптимізований Е. Ротом. Новий алгоритм виявився настільки успішним, що спостерігалося 90% скорочення числа студентів, які вступили до ЗВО, щодо який не мали жодних уподобань. Сьогодні все більша кількість великих міст США використовує оптимізований алгоритм Гейла-Шеплі для вирішення цієї проблеми [5].

Модель фірми-працівники, де існує множина фірм і працівників. Кожен працівник має свої уподобання відносно фірм, де він бажав би працювати, а кожна фірма — відносно підмножин працівників (так як працівники створюють колективи, а одні колективи можуть для фірми виявитись більш уподобаними, ніж інші).

Емпіричним підтвердженням реалізації алгоритму Гейла-Шеплі є ринок молодих лікарів. Ця задача була запропонована Елвіном Ротом у 1984 році. Він досліджував американський ринок випускників медичних коледжів, на якому щорічно виникає проблема працевлаштування молодих лікарів. Водночас виникає ситуація пошуку партнерства: лікарям небайдуже майбутнє місце роботи, тоді як лікарні можуть віддавати перевагу випускникам певних коледжів і за певною спеціальністю з урахуванням рівня підготовки.

Було показано, що ринок молодих лікарів не працював належним чином при стихійній організації обміну інформацією. В 1940 р. у США виник хронічний дефіцит молодих медичних спеціалістів, який регулярно приводив до дезорганізації системи відбору. Щоб гарантувати приплив фахівців, лікарні робили пропозиції студентам-медикам задовго до випуску, не маючи даних ні про якість, ні про інтереси майбутніх випускників. Якщо пропозиція відхилялась — а частіше всього це відбувалось наприкінці навчання, — то у лікарні не залишалось часу для пропозиції іншим випускникам, що поглиблювало дефіцит кадрів. Щоб вирішити цю проблему роботодавці намагались вводити жорсткі часові рамки для прийняття на роботу, які лише обмежували здатність випускників зробити правильний вибір. Наслідком цієї всієї плутанини була плинність кадрів, яка відображала неефективність і нестабільність механізму парних розподілень.

Ситуація радикально змінилась у 1952 р., коли було створено національний інформаційний центр для підтримки працевлаштування молодих лікарів — National Residents Matching Program (NRMP). Це недержавна некомерційна організація взяла на себе координацію процесу розподілення на основі добровільної участі. Її діяльність була настільки успішною, що в короткі строки виявились охопленими практично всі випускники. У молодих спеціалістів, отримавши роботу, анулювались стимули до зміни місця працевлаштування. Рот показав, що в основі успіху лежало використання алгоритму пошуку стабільних пар [5].

Також за допомогою алгоритму Гейла-Шеплі може бути вирішена задача про розподілення нирок та інших органів для трансплантації та пацієнтів. Особливість цього алгоритму в тому, що в ньому розглядається проблема пасивної взаємодії сторін. Якщо раніше, наприклад, у задачі про розподілення у ЗВО, взаємодія учасників була активною і сторони самі могли приймати рішення, то в цьому випадку

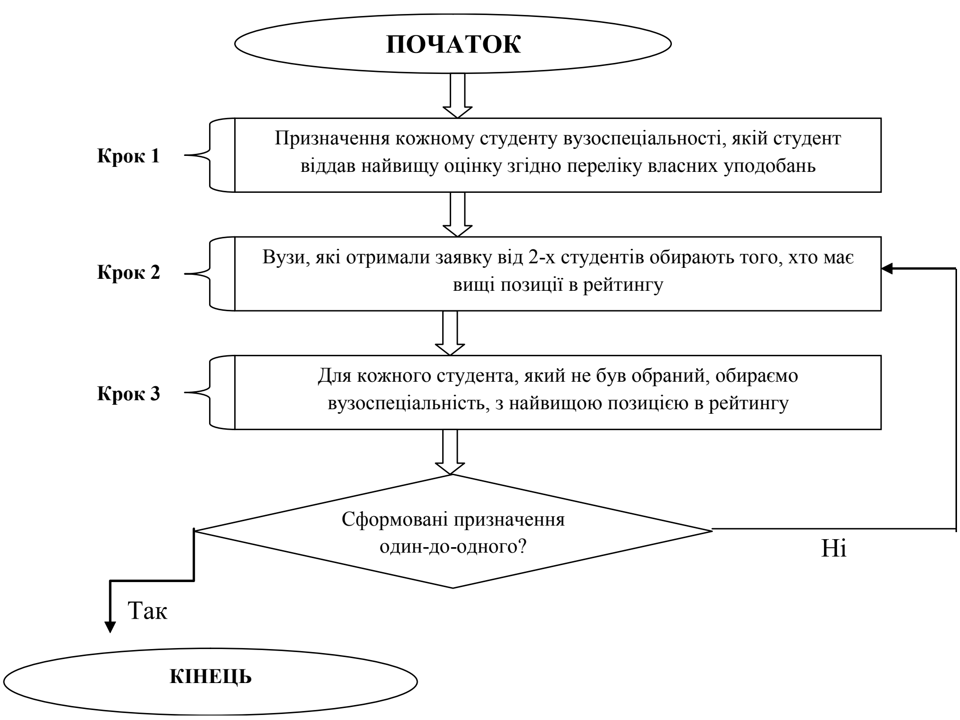

Рис. 1. Блок-схема реалізації алгоритму Гейла-Шеплі

одна із сторін не бере участі у процесі. Ці розробки, які були виконані самим Шеплі, дозволили лікарям розробляти схеми, в яких, наприклад, нирка донора-родича йде не хворому, а, наприклад, третій стороні, а вже його родич дає нирку для певного хворого. Зрозуміло, що кількість обмінів у такому циклі може бути більше двох [5].

І, нарешті, останньої із відмічених Нобелівським комітетом сфер застосування алгоритму Гейла-Шеплі стали різного роду ринки [5]. Наприклад, теоретичні роботи дозволили встановити, що механізм ціни-оплати цілком можна вбудувати в алгоритм. Так, наприклад, подібного роду роботи виявились корисними для вивчення функціонування інтернет-аукціонів, які відрізняються від звичайних [6].

Наведені приклади, звичайно ж, не вичерпують весь спектр застосування робіт Гейла-Шеплі.

Проблема двосторонніх ринків розглядається в книзі Рота та Сотомаєра [14], а також у статті Е. Рота "Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open questions" [15].

Для того, щоб розглянути механізм застосування алгоритму Гейла-Шеплі в умовах становлення українського суспільства, запропонуємо принципово нову задачу двостороннього розподілу. Мова йде про систему стійкого матчингу один до одного 1↔1, в ході якого проводиться розподіл студентів по іменним стипендіям.

Загалом, проблема розподілення в освітній сфері в Україні знову стає актуальною, оскільки спостерігається повний перехід до Болонської системи освіти. Нові централізовані схеми були реалізовані в Бостоні [16] і Нью-Йорку, а в подальшому додатки були описані в статті "Schools Choice: A mechanism design approach" [17].

Існують також деякі дослідження існуючих відповідних схем у таких країнах, як Іспанія [6], Туреччина [2], Німеччина [13], але все ще існує брак інформації про деталі цих схем у зазначених країнах, та про схеми двостороннього матчингу в інших державах.

У роботі "Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged" [12] розглядається схема централізованого матчингу "студент-ЗВО", яка існує в Угорщині з 1985 р. Нову систему було створено в 2000 р. В обох випадках для раціонального розподілення студентів був використаний алгоритм Гейла-Шеплі [1].

Проблему ефективного розподілення було розглянуто на прикладі пошуку випускниками шкіл іменних стипендій ЗВО за результатами ЗНО. Кожен ЗВО має лише 1 стипендію для кожної спеціальності. Цим самим реалізовано задачу двостороннього матчингу один-до-одного (1↔1).

Для вирішення задачі сформуємо набір пошукачів (випускники шкіл, які вступають до ЗВО) і набір позицій, що обираються. Кожну з таких позицій назвемо "ЗВО-спеціальність".

Для забезпечення мотивації пошукачів певної спеціальності, припустимо, що іменна стипендія значно більша за звичайну (її розмір може бути встановлений міською/обласною радою). Гіпотетично ми можемо прийняти, що розмір стипендії є фіксованим і не залежить від ЗВО і спеціальності. Рівність стипендій елімінує грошовий фактор під час формування уподобань пошукачів у ЗВО-спеціальностях.

З заданої множини ЗВО-спеціальностей кожний випускник-пошукач формує свій перелік уподобань.

Система уподобань, які приписуються позиціям, буде однаковою для всіх ЗВО-спеціальностей — це рейтинг ЗНО.

Задача полягає у тому, щоб оптимальним чином розподілити набір пошукачів по ЗВО-спеціальностям з урахуванням уподобань обох сторін.

Для реалізації схеми необхідно провести початковий збір інформації. В сучасному світі існує достатня кількість методів, якими це можна забезпечити (анкетування, інтерв'ю і т.д.). На основі першого етапу збору інформації формується вихідна матриця уподобань з переліком всіх можливих варіантів вибору. У такому випадку, задача полягає в тому, щоб обрати найбільш затребувані варіанти, яким більшість віддала перевагу. Подальша реалізація цього алгоритму буде базуватися лише на опрацьованій матриці вихідних уподобань.

Крім того, під час аналізу матриці буде прослідковуватися чітка система конкуренції.

У разі переходу до етапу програмної реалізації, можна ознайомитися з демонстрацією роботи алгоритму Гейла-Шеплі за допомогою демонстраційної версії Каліфорнійського університету в Берклі [8] та демонстраційної версії на мові програмування JavaScript, яка була розроблена Бартоном ван Ноутом [9].

У результаті реалізації програмного комплексу на будь-якій доступній мові програмування, отримаємо експериментально підтверджений ефективний розподіл іменних стипендій за ЗВО-спеціальностями, враховуючи систему уподобань і зацікавленість студентів. Отриманий результат виключає можливість існування блокуючої пари, що забезпечує стійкість такого розподілу.

Запропонована задача є досить актуальною в сучасних умовах, оскільки загалом система розподілу ресурсів в освітній сфер є інструментом управління найголовнішим ресурсом країни — інтелектуальним ресурсом у процесі переходу суспільства до суспільства сталого розвитку. Якщо країна не контролює дані показники, то така система розвивається спонтанно і ситуаційно.

Важливим критерієм якості є забезпечення справедливого доступу до якісної вищої освіти на конкурсних засадах та забезпечення відбору до ЗВО осіб, здатних успішно навчатися за певним напрямом та наявність мотиваційного фактору. Послідовне запровадження цих принципів можливе на підставі сучасних наукових методів, інноваційних підходів, які дозволяють ефективно вирішувати прикладні задачі.

ВИСНОВКИ

Реалізація алгоритму Гейла-Шеплі у різноманітних модифікаціях дозволяє оптимізувати процес розподілу там, де не діють економічні механізми. Кооперативні ігри можуть застосовуватись для взаємодії між людьми, які розраховують на співпрацю, наприклад, на міжнародних перемовинах, у міждержавних союзах або під час розробки єдиних підходів у міжнародній антикризовій політиці. Якщо ми будемо розуміти, які алгоритми працюють у розв'язанні глобальних задач, то це буде мати величезне значення і для розробки спільних рішень, і для зниження рівня конфліктності у міжнародних економічних відносинах.

Література:

1. Gale D.; Shapley L.S. College Admissions and the Stability of Marriage. The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1 (Jan., 1962), 9—15.
2. Balinski M. and Sonmez T. A tale of two mechanism: Student placement. J. Econom. Theory, 84 (1): 73—94, 1999.
3. Gale D. and Sotomayor M. Some remarks on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 223—232, 1985.
4. Serrano R. Cooperative games: core and Shapley value. In Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Edited by R. Meyers. New York: Springer, 2009.
5. Stable matching: Theory, evidence and practical design. Material of the Royal Sweden Academy of sciences. The prize in economic sciences 2012.
6. Roberto-Medina A. Implementation of stable solution in a restricted matching market. Review of Economic Design, 3 (2): 137—147, 1998.

7. Halldorsson M.M., Iwana K., Miyazaki S. and Yanagisawa H. Randomized approximation of the stable marriage problem. Theoretical Computer Science, Vol. 325, No. 3, pp. 439—465, 2004.

8. Демонстраційна версія алгоритму Гейла-Шеплі. Каліфорнійський університет. // http://mathsite.math.berkeley.edu/smp/smp.html

9. Демонстраційна версія алгоритму на JavaScript Бартона ван Ноута // http://sephlietz.com/gale-shapley/

10. Dubins L.E., Freedman D.A. Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm. The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 7 (Aug-Sep., 1981), pp. 485—494.

11. Boros E., Gurvich V., Jastar S. and Krasner. Stable matching in three-sided systems with cyclic preferences. Discrete Mathematics, Vol. 289, pp. 1—10, 2004.

12. Biro Peter. Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged. Technical Report. Department of Computing Science. University of Glasgow, UK. Glasgow G12 8QQ, TR-2008-291. October 2008.

13. Braun S., Dwenger N., and Kubler D. Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralized university admission in Germany. 2007. SFB 649 Discussion Paper 2007-070.

14. Roth A.E. and Sotomayor M. Two-sided matching, volume 18 of Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. A study in game-theoretic modeling and analysis, With a foreword by Robert Aumann.

15. Roth A.E. Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open questions. Internat. J. Game Theory, 36, 2008.

16. Abdulkadiroglu A., Pathak P.A., Roth A.E. and Sonmez T. The Boston public school match. American Economics Review, Papers and Proceedings, 95(2): 368—371, 2005.

17. Abdulkadiroglu A., Pathak P.A., Roth A.E. The New York City high school match. American Economics Review, Papers and Proceedings, 95(2): 364—367, 2005.

References:

1. Gale, D. and Shapley, L.S. (1962), "College Admissions and the Stability of Marriage", The American Mathematical Monthly, vol. 69, pp. 9—15.

2. Balinski, M. and Sonmez, T. (1999), "A tale of two mechanism: Student placement", J. Econom. Theory, vol. 84 (1), pp. 73—94.

3. Gale, D. and Sotomayor, M. (1985), "Some remarks on the stable matching problem", Discrete Applied Mathematics, vol. 11, pp. 223—232.

4. Serrano, R. (2009), Cooperative games: core and Shapley value. In Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, USA.

5. Material of the Royal Sweden Academy of sciences (2012), "Stable matching: Theory, evidence and practical design", available at: https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/popular-economicsciences2012.pdf (Accessed 16 June 2019).

6. Roberto-Medina, A. (1998), "Implementation of stable solution in a restricted matching market. Review of Economic Design", EconPapers, vol. 3 (2), pp. 137—147.

7. Halldorsson, M.M. Iwana, K. Miyazaki, S. and Yanagisawa, H. (2004), "Randomized approximation of the stable marriage problem", Theoretical Computer Science, vol. 325 (3), pp. 439—465.

8. MathSite (2019), "Stable Marriage Problem", available at: http://mathsite.math.berkeley.edu/smp/smp.html (Accessed 16 June 2019).

9. Sephlietz (2019), "Gale-Shapley Algorithm Demonstration", available at: http://sephlietz.com/gale-shapley/ (Accessed 16 June 2019).

10. Dubins, L.E. and Freedman, D.A. (1981), "Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm", The American Mathematical Monthly, vol. 88 (7), pp. 485—494.

11. Boros, E. Gurvich, V. Jastar, S. and Krasner, D. (2004), "Stable matching in three-sided systems with cyclic preferences", Discrete Mathematics, vol. 289, pp. 1—10.

12. Biro, P. (2008), Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged. Department of Computing Science, University of Glasgow, UK.

13. Braun, S. Dwenger, N. and Kuble, D. (2007), "Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralized university admission in Germany", SFB 649, Germany.

14. Roth, A.E. and Sotomayor, M. (1990), "Two-sided matching. Econometric and Society Monographs", Cambridge University Press, Cambridge, UK.

15. Roth, A.E. (2008), "Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice and Open questions", Internat. J. Game Theory, vol. 36.

16. Abdulkadiroglu, A. Pathak, P.A. Roth, A.E. and Sonmez, T. (2005), "The Boston public school match", American Economics Review, Papers and Proceedings, vol. 95 (2), pp. 368—371.

17. Abdulkadiroglu, A. Pathak, P.A. and Roth, A.E. (2005), "The New York City high school match", American Economics Review, Papers and Proceedings, vol. 95 (2), pp. 364—367.

Стаття надійшла до редакції 19.06.2019 р.